Olympiadeklassen **9–10**

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

601011

a) Ben ist auf dem Weg zum Bäcker und fragt sich, ob er den verlangten Betrag mit seinem Geld passend wird bezahlen können. In seinem Geldbeutel hat er insgesamt 7 Ein-Euro-Münzen und 21 Zehn-Cent-Stücke.
Welche Geldbeträge kann er damit passend bezahlen und wie viele Beträge sind das?

b) Ella hat in ihrem Geldbeutel insgesamt x Ein-Euro-Münzen und y Zehn-Cent-Stücke.
Wie viele verschiedene Geldbeträge kann Ella damit passend bezahlen?
Führen Sie zur vollständigen Beantwortung dieser Frage eine Fallunterscheidung durch und finden Sie für jeden Fall eine Formel, welche die gesuchte Anzahl in Abhängigkeit von x und y angibt.

Hinweis: Jeder passend bezahlbare Betrag soll nur einmal gezählt werden, auch wenn er auf unterschiedliche Arten aus den vorhandenen Geldstücken zusammengesetzt werden kann.

Die 0,00 Euro für einen kostenlosen Einkauf sollen ebenfalls als möglicher Betrag gelten.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

601012

Wir betrachten in dieser Aufgabe Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen und untersuchen, welche von ihnen Lösungen der Gleichung

$$a^2 + 3 \cdot a \cdot b = c^2 \tag{1}$$

sind. So ist das Tripel $(2, 16, 10)$ eine Lösung von (1), weil $2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 16 = 10^2$ wahr ist.

a) Geben Sie zwei weitere Lösungen von (1) an.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele Lösungen hat.

c) Wie viele Lösungen gibt es, wenn zusätzlich $c = 2 \cdot a + 3$ gilt?

601013

a) Zeigen Sie: Sind a und b beliebige dreistellige natürliche Zahlen, so lassen die beiden sechsstelligen Zahlen $1000\,a + b$ und $1000\,b + a$ den gleichen Rest bei Division durch 37.

b) Die 3000-stellige Zahl $n = 9999\ldots99$ entsteht durch das Aneinanderreihen von 3000 Neunen.
Zeigen Sie: Die Zahl n ist durch 37 teilbar.

601014

Wir betrachten in einer Ebene die vier verschiedenen Punkte A, B, C und D, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g liegen.

Zeigen Sie:

a) Wenn für jeden Punkt P auf g die Ungleichung

$$|AP| + |DP| \geq |BP| + |CP|$$

gilt, dann ist $|AB| = |CD|$.

b) Wenn für jeden Punkt P der Ebene, der nicht auf g liegt, die Ungleichung

$$|AP| + |DP| > |BP| + |CP|$$

gilt, dann ist $|AB| = |CD|$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

601015

Wir betrachten ein bei O rechtwinkliges Dreieck OAB mit den Kathetenlängen $|OA| = a$ und $|OB| = b$, wobei in allen Aufgabenteilen $a > b$ sein soll.

Sei C der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ mit der Strecke $\overline{OA}$.

a) Weisen Sie für die Länge $|BC|$ der Strecke $\overline{BC}$ nach, dass $|BC| = \frac{a^2+b^2}{2a}$ gilt.

b) Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welches die Länge $|BC|$ ganzzahlig ist.
Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welches die Länge $|AB|$ ganzzahlig ist.

c) Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welche die Längen der Seiten und der Höhen des Dreiecks ABC sämtlich ganzzahlig sind.

Hinweis: Die positiven ganzen Zahlen sind die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

In b) und c) ist selbstverständlich jeweils zu zeigen, dass die angegebenen Beispiele die gewünschten Eigenschaften auch haben.

601016

Max hat eine Rechenvorschrift festgelegt, durch die je zwei rationalen Zahlen x und y eine rationale Zahl z zugeordnet wird. Er schreibt dafür $z = x \# y$. (Die Zahl z wird also mit Hilfe einer Formel aus x und y berechnet.)

Anschließend stellt er fest, dass für beliebige rationale Zahlen a, b, c die Gleichung

$$a + (b \# c) = (a \# b) + (a \# c) \tag{1}$$

gilt.

a) Geben Sie eine Rechenvorschrift für $x \# y$ an, die nur die vier Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$ als Rechenarten verwendet, so dass (1) erfüllt ist.
Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) für beliebige rationale Zahlen a, b, c durch diese Rechenvorschrift tatsächlich erfüllt wird.

b) Zeigen Sie: Wenn für beliebige rationale Zahlen a, b, c die Gleichung (1) gilt, dann gilt für die Rechenvorschrift von $\#$ die Formel aus a).

Hinweis: Es müssen nicht alle vier Grundrechenarten in der Rechenvorschrift vorkommen. Ein Beispiel für eine Rechenvorschrift ist $x \# y = 3 \cdot (x : y + 2020)$. Es ist aber nicht die gesuchte Rechenvorschrift bzw. Formel.