



© 2023 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

630711

Von einem Arzt, einem Biologen, einem Chemiker und einem Dachdecker ist bekannt, dass jeder genau einen der Namen Ehlers, Fink, Gröger und Helbig führt und jeder in genau einer der Städte Ingolstadt, Jena, Köln und Leipzig wohnt. Sie treffen sich bei einer Ausstellung. Weiter ist zu ihnen bekannt:

- (1) Der Arzt wohnt in Köln.
- (2) Herr Ehlers ist weder Chemiker noch Arzt.
- (3) Herr Helbig und Herr Gröger lernten sich über den Chemiker kennen.
- (4) Der Dachdecker wohnt in Jena und ist älter als der Herr aus Leipzig.
- (5) Herr Helbig, der in Jena wohnt, korrespondiert mit Herrn Fink per E-Mail.
- (6) Der Chemiker und der Herr aus Ingolstadt übernachten in verschiedenen Hotels.

Ermittle, welche Person welchen Beruf hat und in welcher Stadt die jeweilige Person wohnt.

630712

Eine Umkehrprimzahl ist eine Primzahl, deren Ziffern bei Aufschreiben in umgekehrter Reihenfolge wieder eine Primzahl ergeben.

Beispiele: Die Zahl 13 ist eine Umkehrprimzahl, da 13 und 31 Primzahlen sind. Die Zahl 157 ist eine Umkehrprimzahl, da 157 und 751 Primzahlen sind. Die Zahl 23 ist keine Umkehrprimzahl, da 32 keine Primzahl ist.

- a) Gib alle Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 an.
- b) Gib alle Umkehrprimzahlen kleiner als 102 an, die jeweils die Summe von genau drei paarweise verschiedenen Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 sind. Gib zu diesen Zahlen jeweils eine solche Summendarstellung an.
- c) Begründe, dass es nicht möglich ist, aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 4 so auszuwählen, dass deren Summe eine Umkehrprimzahl ist.
- d) Untersuche, ob man aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 5 paarweise verschiedene so auswählen kann, dass deren Summe eine zweistellige Umkehrprimzahl ist.

Hinweis: Paarweise verschieden heißen Zahlen, wenn keine zwei von ihnen gleich sind. So sind die drei Zahlen 1, 2 und 3 paarweise verschieden, die drei Zahlen 1, 2 und 2 aber nicht.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630713

Ben und Leon spielen ein Spiel mit Streichhölzern. Dazu entnehmen sie mehreren nichtleeren Streichholzschachteln alle Streichhölzer, zählen sie und legen sie auf einen Teller. Abwechselnd ziehen sie nun, wobei ein Zug aus dem Entnehmen von mindestens einem Streichholz, aber nicht mehr als der Hälfte der Streichhölzer vom Teller besteht, es sei denn, es liegt nur noch genau ein Streichholz auf dem Teller, dann darf dieses entnommen werden. Wer als Letzter ziehen kann, gewinnt.

- a) Untersuche, ob das Spiel immer endet und es dabei immer einen Gewinner gibt.
- b) Auf dem Teller liegen genau 120 Streichhölzer. Ben darf beginnen. Ben überlegt sich folgende Strategie:
 - 1. Bei meinem ersten Zug nehme ich genau 25 Streichhölzer weg.
 - 2. Wenn mehr als ein Streichholz auf dem Teller liegt und es nicht mein erster Zug ist, dann nehme ich genau so viele Streichhölzer weg, dass die Anzahl der auf dem Teller verbleibenden Streichhölzer genau die Hälfte der um 1 verringerten Anzahl an Streichhölzern ist, die nach meinem letzten Zug auf dem Teller lagen.
 - 3. Wenn genau ein Streichholz auf dem Teller liegt, dann entnehme ich dieses.Zeige, dass jeder von Bens Schritten regelkonform ist und dass Ben mit dieser Strategie bei allen regelkonformen Zügen von Leon immer gewinnt.
- c) Untersuche, ob Ben seine Strategie so anpassen kann, dass er auch bei anderen Anzahlen von Streichhölzern in den vollen Streichholzschachteln immer gewinnt, wenn er beginnt.

Hinweis: Die in der Teilaufgabe b) beschriebene Strategie reagiert auf die Züge von Leon und lässt Ben bei allen regelkonformen Zügen von Leon gewinnen, wie zu zeigen ist. Eine solche Strategie nennt man *Gewinnstrategie*.

630714

Die Lage von vier Geraden in einer Ebene, von denen keine mit einer anderen übereinstimmt, kann durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte unterschieden werden.

- a) Gib die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten an, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige eine Zeichnung mit dieser Anzahl an Schnittpunkten an und begründe, warum mehr Schnittpunkte nicht möglich sind.
- b) Finde alle weiteren möglichen Anzahlen von Schnittpunkten, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige für jede dieser Anzahlen eine entsprechende Zeichnung an. Begründe, warum alle anderen Anzahlen nicht möglich sind.